Fonctions Linéaires et affines

I. Fonction linéaire

Définition
Soit a un nombre donné.
On définit une fonction linéaire f lorsque, à tout nombre x, on associe le nombre ax.
Le nombre a est le coefficient de linéarité de la fonction.
Le nombre ax est l'image du nombre x par la fonction linéaire.

Notations :
On note f : x $\to$ ax la fonction linéaire f de coefficient a.
On note f(x) l'image du nombre x par la fonction linéaire f.
On écrit f(x) = ax.

x	$\times a$
f(x) = ax	

Exemple :
La fonction f qui, a un nombre x, fait correspondre son double est une fonction linéaire ; son coefficient est 2.
On la note f : x $\to$ 2x ou f(x) = 2x.

x	- 3	$\times 2$
f(x) = 2x	- 6	

L'image de – 3 par f est notée f (- 3).
f (- 3) = 2 × (- 3) = - 6
Donc l'image de – 3 par la fonction linéaire f est – 6.

Propriété :
Toute situation de proportionnalité peut se traduire mathématiquement par une fonction linéaire.

Exemple :
Le périmètre d'un carré est proportionnel au côté du carré.
La fonction linéaire associée, notée p est définie par p : x $\to$ 4x ou p(x) = 4x.

x	5	$\times 4$
p(x) = 4x	20	

On calcule, par exemple, p(5) = 4 × 5 = 20.
Cela signifie que l'image du nombre 5 par la fonction p est le nombre 20, soit que le périmètre d'un carré de côté 5 est 20.

II. Représentation graphique d'une fonction linéaire

Propriété :
La représentation graphique d'une fonction linéaire de coefficient a est une droite passant par l'origine du repère.
Le nombre a est appelé coefficient directeur de la droite.

Remarque :
La droite passe par le point A(1 ;a).
Le nombre a indique l'inclinaison de la droite par rapport à l'axe des abscisses.

Exemple 1 : Je représente graphiquement la fonction linéaire f définie par f : x $\to$ 2x.
La représentation graphique de f est la droite (d_1) qui passe par l'origine du repère et le point $A_1(1 ; 2)$.
(Elle passe aussi par le point de coordonnées (- 3 ; - 6))
On lit que l'image de 4 est 8 et que le nombre qui a pour image – 3 est – 1,5.
Les coordonnées (x ; y)d'un point de la droite (d_1) vérifient l'équation y = 2x.
On dit que la droite (d_1) a pour équation y = 2x.

Exemple 2 : Je représente graphiquement la fonction linéaire g définie par g : x $\to -\frac{3}{4}$x.

La représentation graphique de g est la droite (d_2) qui passe par l'origine du repère et le point $A_1(1 ; -\frac{3}{4})$.

(Elle passe aussi par le point de coordonnées (4 ; - 3))

III. Fonction affine

1°/ Généralités

<u>Définition :</u>
Etant donnés deux nombres a et b, on définit une ***fonction affine*** f lorsque, à tout nombre x, on associe le nombre $ax + b$.
Les nombres a et b sont les ***coefficients*** de f.
Le nombre $ax + b$ est ***l'image de x par f***.

<u>Notation :</u>
La fonction affine de coefficients a et b est notée $f : x \longmapsto ax + b$ ou $f(x) = ax + b$.
f(x) est l'image de x par la fonction f.

<u>Exemple :</u>
La fonction affine de coefficients 2 et – 3 est notée $f : x \longmapsto 2x - 3$ ou $f(x) = 2x - 3$.
L'image de 5 est notée f(5) et $f(5) = 2 \times 5 - 3 = 10 - 3 = 7$
L'image de – 4 est notée f(- 4) et $f(- 4) = 2 \times (- 4) - 3 = - 8 - 3 = - 11$

<u>Cas particuliers :</u>
- Pour $b = 0$:
  f est déterminée par $f : x \longmapsto ax$. C'est donc une fonction linéaire.
  Une fonction linéaire est donc une fonction affine particulière.
- Pour $a = 0$:
  f est déterminée par $f : x \longmapsto b$. Quelle que soit la valeur de x son image est égale au nombre b.
  Cette fonction affine est dite fonction constante.

<u>Propriété :</u>
Pour une fonction affine f, les accroissements de f(x) sont *proportionnels* aux accroissements de x.
Si la fonction est définie par $x \longmapsto ax + b$, le coefficient de proportionnalité des accroissements est le nombre a.

Démonstration :
x_1 et x_2 sont deux nombres distincts quelconques.

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{ax_1 + b - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} = \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = a$$

<u>Exemple :</u>
On considère la fonction $f : x \longmapsto 2x - 3$. On sait que $f(- 4) = - 11$ et $f(5) = 7$. On calcule :

$$\frac{f(-4) - f(5)}{-4 - 5} = \frac{-11 - 7}{-4 - 5} = \frac{-18}{-9} = 2$$ on a bien trouvé 2, coefficient a pour le fonction $f(x) = 2x - 3$

2°/ Application

Déterminer une fonction affine connaissant deux nombres et leurs images.

<u>Exercice</u> : Trouver la fonction affine f telle que – 1 a pour image 4 et 5 a pour image 1

Méthode 1 :

- <u>Traduction des données :</u>
  Comme f est une fonction affine, alors f est de la forme x α $ax + b$ où a et b sont les inconnues.
  Comme $f(- 1) = 4$ alors $a \times (- 1) + b = 4$ ou $- a + b = 4$
  Comme $f(5) = 1$ alors $a \times 5 + b = 1$ ou $5a + b = 1$
- On obtient le système de deux équations $\begin{cases} -a + b = 4 \\ 5a + b = 1 \end{cases}$ où a et b sont les inconnues.

  Je résous par la méthode d'élimination par combinaison.
  $(- a + b) - (5a + b) = 4 - 1$
  $- a + b - 5a - b = 3$
  $- 6a = 3$

$a = -\frac{1}{2}$

Je remplace a par $-\frac{1}{2}$ dans la 1ère équation : $\frac{1}{2} + b = 4$ d'où $b = \frac{7}{2}$

Je remplace a par $-\frac{1}{2}$ et b par $\frac{7}{2}$ dans la 2ème équation : $5 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{7}{2} = \frac{2}{2} = 1$!

Le couple $(-\frac{1}{2} ; \frac{7}{2})$ est la solution du système.

Conclusion : La fonction f est déterminée par $x \mapsto -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ ***ou*** $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$

Méthode 2 :

- Traduction des données :

  Comme f est une fonction affine, alors f est de la forme $x \longmapsto ax + b$ où a et b sont les inconnues.
  Les accroissements de f(x) sont proportionnels aux accroissements de x et le coefficient de proportionnalité est a.

- Calcul du coefficient de proportionnalité a.

  On sait que $a = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$

  Si $x_1 = -1$ et $x_2 = 5$ alors $f(x_1) = f(-1) = 4$ et $f(x_2) = f(5) = 1$. On obtient :
  $a = \frac{f(-1) - f(5)}{-1-5} = \frac{4-1}{-1-5} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$ (ou – 0,5)

- Calcul du coefficient b :

  Comme $f(5) = 1$ alors : $5a + b = 1$ donc $5 \times (-\frac{1}{2}) + b = 1$ donc $b = 1 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$

Conclusion : On retrouve la fonction f déterminée par $x \mapsto -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ ***ou*** $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$

IV. Représentation graphique d'une fonction affine

1°/ Généralités

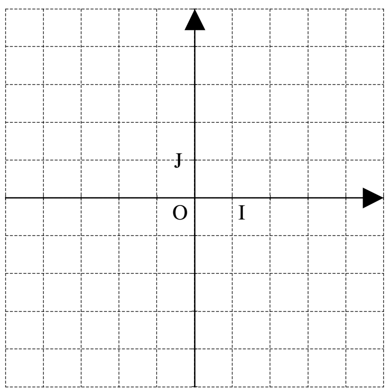
Propriété :
Dans un repère (O;I,J), la représentation graphique de la fonction affine $f : x \longmapsto ax + b$ est une droite (d).
Une équation de (d) est $y = ax + b$.
(d) est parallèle à la représentation graphique de la fonction linéaire $g : x \longmapsto ax$.

Vocabulaire
Soit (d) la représentation graphique de la fonction affine $f : x \longmapsto ax + b$

- (d) passe par le point B(0 ; b), et b est appelé ***ordonnée à l'origine de f***.
- Le coefficient de linéarité de la fonction affine f est a et s'appelle le ***coefficient directeur de la droite (d).***
- La fonction linéaire $g : x \longmapsto ax$ est ***la fonction linéaire associée à f.***

Remarque :
Lorsque $a = 0$, la fonction affine f est définie par $f(x) = b$. ; c'est une fonction constante dont la représentation graphique est une droite parallèle à l'axe des abscisses et qui passe par le point (0 ; b).

Exemple
Soit f : $x \longmapsto 2x + 3$
La représentation graphique de f est la droite (d) d'équation : $y = 2x + 3$.
La droite (d) passe par le point B(0 ;3) ; l'ordonnée à l'origine est 3.
Le coefficient de linéarité est 2.
La fonction linéaire g associée à f est $g : x \longmapsto 2x$. La droite (d') qui représente graphiquement g est parallèle à la droite (d).



2°/ Résolution graphique d'un système de deux équations à deux inconnues.

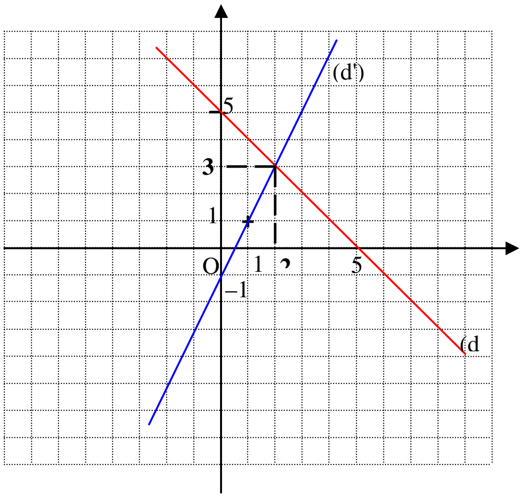
<u>Propriété</u>

La solution du système : $\begin{cases} y = ax + b \\ y = a'x + b' \end{cases}$, lorsqu'elle existe, est le couple des coordonnées du point d'intersection des droites d'équations : y = ax + b et y = a'x + b'.

Exemple :

Soit (d) et (d') les droites d'équations respectives $y = -x + 5$ et $y = 2x - 1$.

Tracer (d) et (d') dans le même repère.



(d) passe par (0 ; 5) et (5 ; 0)
(d') passe par (0 ; –1) et (1 ; 1)

Les droites (d) et (d') se coupent au point de coordonnées (2 ; 3)

La solution du système $\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$ est le couple (2 ; 3)

Remarque :
Cette méthode ne sera pas utilisée pour résoudre un système d'équations (sauf méthode imposée) car elle a des limites : Le graphique doit être très précis et lorsque les coordonnées ne sont pas des entiers leur valeur exacte est difficilement lisible.