Eléments de correction du brevet blanc de Mathématiques du 28/01/2009

ACTIVITES NUMERIQUES (13 POINTS)

Exercice 1 :

1. *On considère l'expression* $A = \sqrt{12} + \sqrt{75} + 4\sqrt{300}$.
   Écris A sous la forme $\sqrt{b}$ *, où a et b sont deux entiers relatifs, avec b le plus petit possible.*
   A = $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} + 40\sqrt{3} = 47\sqrt{3}$
2. *Effectue les calculs suivants en respectant les priorités opératoires. Tu donneras chaque résultat sous forme d'une fraction la plus simple possible.*
   $B = \frac{13}{7} + \frac{8}{7} \div \left(-\frac{4}{5}\right)$ $\qquad C = \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{4} - \frac{4}{3}\right)$

$B = \frac{13}{7} + \frac{8}{7} \times \frac{-5}{4} = \frac{13}{7} - \frac{10}{7} = \frac{3}{7}$

$C = \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{4} - \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{15}{10} + \frac{6}{10}\right)\left(\frac{15}{12} - \frac{16}{12}\right) = \frac{21}{10} \times \frac{-1}{12} = -\frac{7}{40}$

3. *Calcule D en détaillant les étapes et donne le résultat en écriture scientifique.*
   $D = \frac{36 \times 10^{-6} \times 25 \times 10^{5}}{4,5 \times 10^{-4}} = \frac{36 \times 25}{4,5} \times \frac{10^{-6} \times 10^{5}}{10^{-4}} = 200 \times 10^{3} = 2 \times 10^{5}$

Exercice 2 :

1. *On considère l'expression* $A = (2x + 2)^2 - 9$.
   a) *Développe, réduis et ordonne A.*

$A = 4x^2 + 8x + 4 - 9 = 4x^2 + 8x - 5$

   b) *Factorise A.*

$A = (2x + 2 + 3)(2x + 2 - 3) = (2x + 5)(2x - 1)$

   c) *Détermine la valeur de A pour* $x = \frac{2}{3}$*. Tu donneras le résultat sous la forme d'une fraction la plus simple possible.*

$A = \left(2 \times \frac{2}{3} + 2\right)^2 - 9 = \left(\frac{4}{3} + 2\right)^2 - 9 = \left(\frac{10}{3}\right)^2 - 9 = \frac{100}{9} - \frac{81}{9} = \frac{19}{9}$

On considère l'expression $B = (4x - 7)(2x - 3) - (2x - 3)^2$.

   a) *Développe et réduis B.*

$B = 8x^2 - 12x - 14x + 21 - (4x^2 - 12x + 9) = 8x^2 - 26x + 21 - 4x^2 + 12x - 9$

$B = 4x^2 - 14x + 12$

   b) *Factorise B.*

$B = (2x - 3)[(4x - 7) - (2x - 3)] = (2x - 3)(4x - 7 - 2x + 3) = (2x - 3)(2x - 4)$

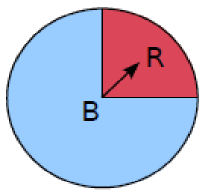
   c) *Sur la figure ci-contre, ABCD est un rectangle et AEFD est un carré. (On suppose, dans cette question, que* x *est un nombre supérieur à 2). Détermine le plus simplement possible l'aire du rectangle EBCF pour* $x = \sqrt{5}$*. Tu donneras le résultat sous la forme* $a + b\sqrt{5}$ *, où a et b sont deux entiers relatifs.*

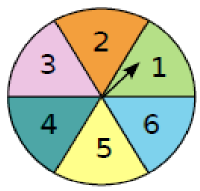
$\mathcal{A}_{EBCF} = \mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{AEDF} = (4x - 7)(2x - 3) - (2x - 3)^2$

$\mathcal{A}_{EBCF} = 4x^2 - 14x + 12 = 4 \times \sqrt{5}^2 - 14 \times \sqrt{5} + 12 = 32 - 14\sqrt{5}$

Exercice 3 :

Dans un jeu, on doit tourner deux roues. La première roue donne une couleur : bleu, avec la probabilité $\frac{3}{4}$*, ou rouge. La deuxième roue donne un chiffre entre 1 et 6 avec la même probabilité.*
Si, après avoir tourné les roues, les aiguilles se trouvent comme sur le schéma, on note (R, 1) le résultat obtenu.





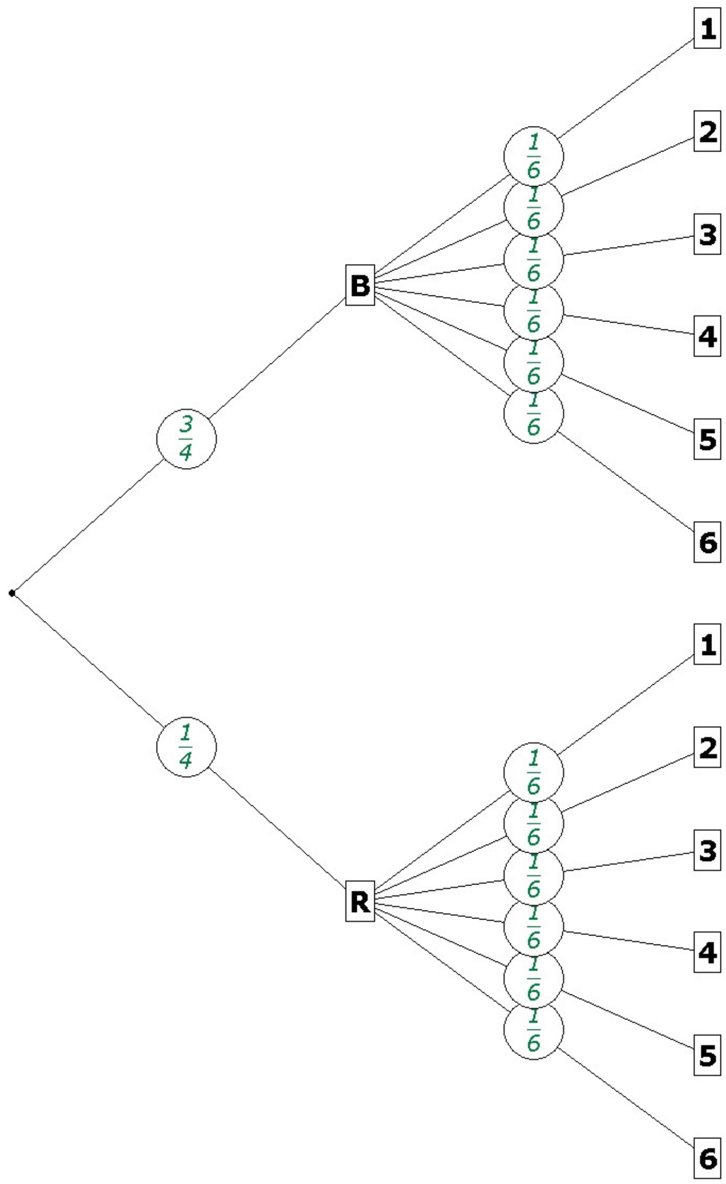
1. *Quelle est la probabilité d'obtenir « Rouge » avec la première roue ?*

La couleur rouge occupe le quart de la surface totale de la première roue donc la probabilité d'obtenir « rouge » est de $\frac{1}{4}$

2. *Quelle est la probabilité d'obtenir chacun des chiffres avec la deuxième roue ?*

La deuxième roue est équilibrée, donc la probabilité d'obtenir chacun des 6 chiffres est de $\frac{1}{6}$

3. *Construis l'arbre des possibles pondéré par les probabilités de cette expérience à deux épreuves. Tu n'oublieras pas d'indiquer sur chaque branche, la probabilité correspondante ainsi que les issues obtenues.*



4. *Quelle est la probabilité du résultat (R, 1) ?*

On note (R,1) l'évènement Rouge sur la première roue et chiffre 1 sur la deuxième roue.

p(R,1) $= \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$

5. *Quelle est la probabilité du résultat (B, 4) ?*

p(B,4) $= \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$

6. *Quelle est la probabilité d'obtenir « Bleu » et un chiffre pair ?*

Les possibilités pour obtenir « Bleu » et un chiffre pair sont les couples de solutions (B,2) ou (B ;4) ou (B ;6)
On note (B,p) l'événement « Bleu » et un chiffre pair.
Les 3 événements (B,2) ; (B,4) et (B,6) sont incompatibles. On peut donc écrire :

p(B,p) = p(B,2) + p(B,4) + p(B,6) $= \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$

7. *Quelle est la probabilité d'obtenir « Bleu » ou un chiffre pair ?*

On note B ou p l'événement cherché. Les cas possibles conduisant à un tel résultats sont les suivants.
(B,1) ou (B,2) ou (B,3) ou (B,4) ou (B,5) ou (B,6) ou (R,2) ou (R,4) ou (R,6). Tous ces événements sont incompatibles entre eux, il suffit donc d'ajouter leurs probabilités.

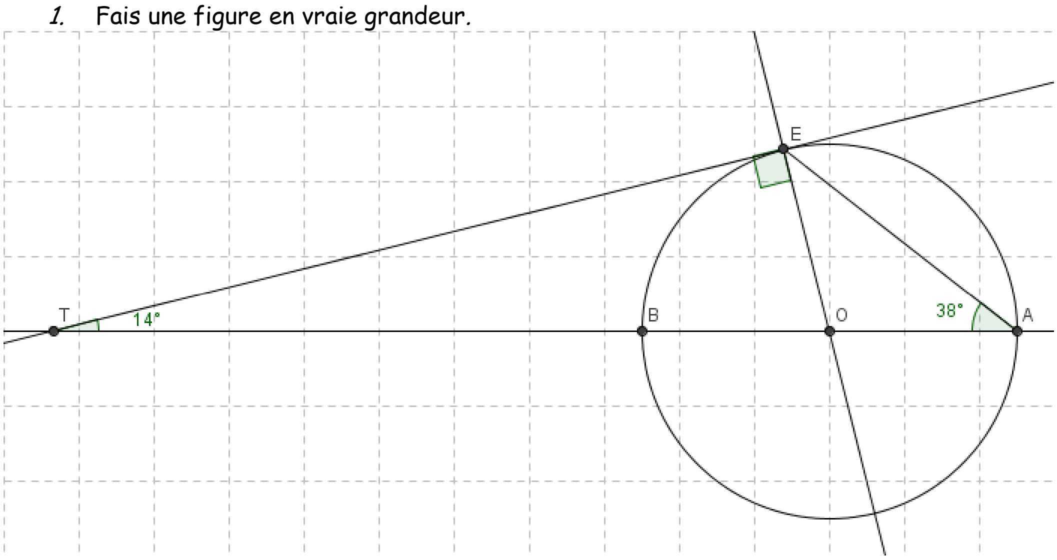
p(Bou p) $= \frac{3}{4} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{18}{24} + \frac{3}{24} = \frac{21}{24} = \frac{3}{4}$

ACTIVITES GEOMETRIQUES (14 POINTS)

Exercice 1 :

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O et de rayon 2,5 cm ; [AB] un diamètre de $\mathcal{C}$ et E un point de $\mathcal{C}$ tel que l'angle $\widehat{BAE}$ mesure 38°. La perpendiculaire à (OE) passant par E coupe (AB) en T.

1. Fais une figure en vraie grandeur.



2. Démontre que le triangle ABE est rectangle en E.

Le triangle ABE est inscrit dans le cercle de diamètre [AB] donc ABE est rectangle en B.

3. Calcule la longueur BE au millimètre près.

On est dans le triangle ABE rectangle en B. $\sin \hat{A} = \frac{EB}{AB}$ *, soit sin 38° =* $\frac{EB}{5}$ *donc EB = 5* x sin 38° (valeur exacte) et EB ≈ 3,1 cm

4. Sachant que l'angle $\widehat{ETO}$ mesure 14°, calcule TE au millimètre près.

On se place dans le triangle ETO rectangle en O. $\tan \hat{T} = \frac{EO}{ET}$ *soit tan 14°=* $\frac{2,5}{ET}$ *donc ET =* $\frac{2,5}{\tan 14°}$ *(valeur exacte) et ET ≈ 10 cm*

Exercice 2 :

Dans un triangle rectangle, pour l'un de ses angles aigus x, $\sin x = \frac{2}{3}$.

1. *Calcule la valeur exacte de* $\cos x$.

On sait que, pour tout angle aigu x, $cos^2\, x + sin^2\, x = 1$

donc $cos^2\, x = 1 - sin^2\, x = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$.

Comme pour tout angle aigu cos x > 0, $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}$

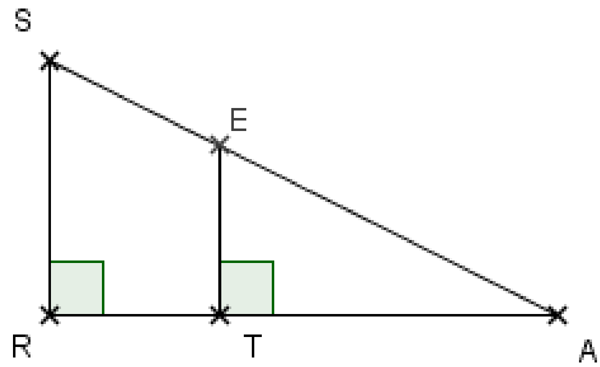
2. *Déduis-en la valeur exacte de* $\tan x$*, Tu donneras le résultat sous forme d'une fraction la plus simple possible.*

on sait que $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ donc $\tan x = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Exercice 3 :

L'unité est le centimètre. AE = 3 ; AT = $\sqrt{5}$; ES = 2 ; les angles $\hat{R}$ et $\hat{T}$ sont droits, E ∈ [AS], T ∈ [AR].

Dans la figure ci-contre ***qui n'est pas à refaire****, les longueurs et les mesures des angles ne sont pas respectées.*



1. *Calcule ET, en justifiant.*

On se place dans le triangle EAT rectangle en T. D'après le Théorème de Pythagore :

$EA^2 = ET^2 + AT^2$ donc 32 = ET^2 + 5 donc ET^2 = 9 – 5 = 4 Comme ET est une longueur donc ET = 2 cm

2. *Calcule AR. Tu donneras le résultat sous la forme* $\frac{a\sqrt{5}}{b}$*, où a et*

b sont deux entiers relatifs.

On se place dans le triangle ARS. Les droites (SE) et (RT) sont sécantes en A. Comme (ET) et (RS) sont perpendiculaires à la même droite, alors elles sont parallèles entre elles.

On a donc (ET) // (RS). On peut appliquer le théorème de Thales : $\frac{AT}{AR} = \frac{AE}{AS} = \frac{ET}{SR}$

On obtient donc $\frac{\sqrt{5}}{AR} = \frac{3}{5}$ donc $AR = \frac{5 \times \sqrt{5}}{3} = \frac{5\sqrt{5}}{3}$

3. *Calcule la mesure de l'angle $\widehat{EAT}$ approchée à 1° près.*

On se place dans le triangle EAT rectangle en T

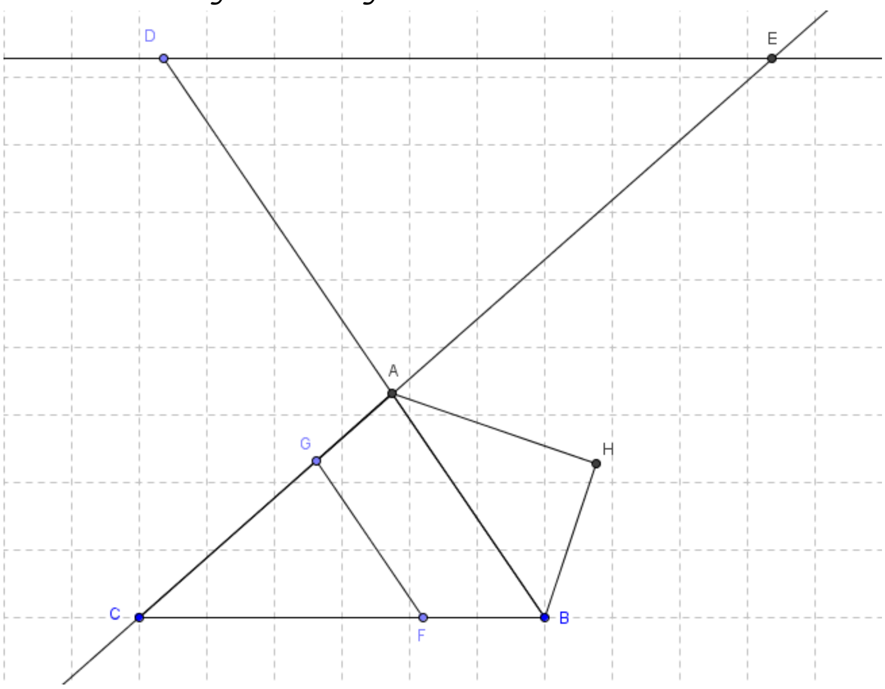
$\cos \widehat{EAT} = \frac{AT}{EA} = \frac{\sqrt{5}}{3}$. La calculatrice nous permet de trouver $\widehat{EAT} \approx 42°$

PROBLEME DE GEOMETRIE (12 POINTS)

L'unité est le centimètre ; ABC est un triangle tel que AB = 4 ; BC = 6 et CA = 5. D est le point de [BA) tel que BD = 10.

La parallèle à la droite (BC) passant par D coupe la droite (AC) en E.

1. *Fais une figure en vraie grandeur.*



2. *Calcule les valeurs exactes de DE et de AE.*

Les droites (EC) et (DB) sont sécantes en A. Comme (BC)//(DE), on peut appliquer le théorème de Thalès.

$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$ On obtient donc $\frac{4}{6} = \frac{5}{AE} = \frac{6}{ED}$ ce qui permet de trouver $AE = \frac{6 \times 5}{4} = 7{,}5\ cm$ et $ED = \frac{6 \times 6}{4} = 9\ cm$

3. *F est le point du segment [BC] tel que BF = 1,8 cm et G est le point du segment [AC] tel que AG = 1,5. Complète la figure. Démontre que les droites (AB) et (FG) sont parallèles.*

Les droites (GA) et (FB) sont sécantes en C

On calcule : $\frac{CG}{CA} = \frac{3{,}5}{5} = 0{,}7$; et $\frac{CF}{CB} = \frac{4{,}2}{6} = 0{,}7$ donc on a $\frac{CG}{CA} = \frac{CF}{CB}$

Les points C, G A et C, F, B sont alignés dans le même ordre, donc d'après la récirpoque du théorème de Thales (GF)//(AB)

4. *H est le point situé de l'autre côté de C par rapport à la droite (AB), tel que BH = 2,4 et AH = 3,2. Complète la figure.*

   a) *Démontre que ABH est un triangle rectangle.*

[AB] est le coté le plus long. $AB^2 = 4^2 = 16$; $AH^2 + BH^2 = 3{,}2^2 + 2{,}4^2 = 16$ on a donc $AB^2 = AH^2 + BH^2$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABH est rectangle en H

   b) *Calcule les sinus, cosinus et tangente de l'angle $\widehat{BAH}$. Tu donneras chaque résultat sous forme de fraction la plus simple possible.*

On est dans le triangle ABH rectangle en H. $sin\,\widehat{BAH} = \frac{HB}{AB} = \frac{2{,}4}{4} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$ $cos\,\widehat{BAH} = \frac{HA}{AB} = \frac{3{,}2}{4} = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$

et $tan\,\widehat{BAH} = \frac{HB}{HA} = \frac{2{,}4}{3{,}2} = \frac{3}{4}$

   c) *Déduis-en l'arrondi de cet angle à 1° près.*

On obtient avec la calculatrice $\widehat{BAH} \approx 37°$